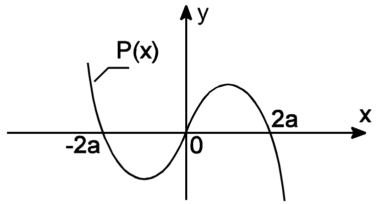
MATEMÁTICA

01. Sea la igualdad:
$|x - a + b| = |x + a - b|$ .... (*)
entonces la proposición verdadera es:
A) (*) si y solo si: $x = 0 \vee a^2 = b^2$
B) (*) si y solo si: $x = a = b$
C) (*) si y solo si: $x = 0 \wedge a = b$
D) (*) si y solo si: $x = 0 \vee a = b$
E) (*) si y sólo si: $x = a = -b$

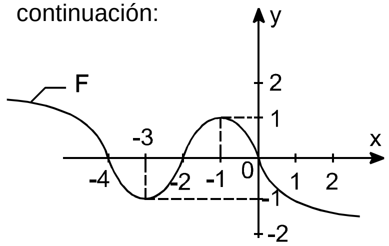
02. Si: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{13}{6}$, $x^2+y^2 = 5$, $x < 0 < y$ y $|y| < |x|$, calcular el valor de:
$$S = \sqrt{2}y + \sqrt{3}x$$
A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

03. En la figura se muestra la gráfica del polinomio cúbico P(x):

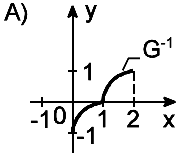


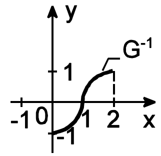
Sabiendo que P(a) = 20, calcule:
$$\sqrt{P(-3a)}$$
A) 4 B) 5 C) 8
D) 10 E) 12

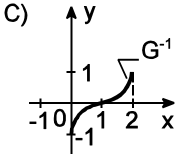
04. El gráfico de la función F se muestra a continuación:

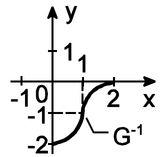


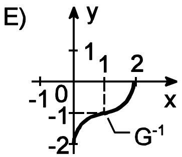
determine, aproximadamente, el gráfico de la inversa de la función:
$G(x) = |F(x - 2) + 1|; -1 \le x \le 1$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

05. Si a, b y c son constantes positivas y
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$ determine el valor de "x".
A) $\frac{abc}{a+b+c}$
B) $\frac{abc}{ab+ac+bc}$
C) $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$
D) $\frac{a+b+c}{abc}$
E) $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$

06. El sistema de inecuaciones:

$$\begin{aligned} x - 3y &\le 6 \\ 2x + y &\ge 4 \\ x + y &\le 6 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

determina en el plano una región R. Podemos afirmar que:
A) R es una región triangular.
B) R es una región cuyo borde es un cuadrado.
C) R es una región cuyo borde es un cuadrilátero.
D) R es vacía.
E) R es un cuadrante.

07. Si el conjunto solución de la inecuación:
$(2^x - x)(3^x - \text{Log}_3 x)(x^2 - 9)(3^x - 9) > 0$
es de la forma S = <a, b> $\cup$ <c, +∞>, halle a + b + c
A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 5

08. Sea "u" el número de decenas de sillas y "v" el número de decenas de mesas que fabrica una empresa al día. Si la utilidad diaria está dada por 200u + 300v y se tienen las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} u + v &\le 4 \\ 2u + 3v &\le 10 \\ 40u + 20v &\le 120 \end{aligned}$$

encuentre el número de decenas de mesas y sillas, respectivamente, a fabricar diariamente de modo que la empresa obtenga la mayor utilidad.
A) 3 y 1 B) 1 y 3 C) 2 y 2
D) 2 y 3 E) 3 y 2

09. Dada la sucesión 2, 6, 12, 20, 30, 42, ... determine la suma de los 100 primeros términos de la sucesión anterior.
A) 10 100 B) 294 880 C) 323 400
D) 333 300 E) 343 400

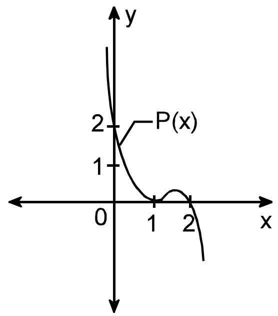
10. Si los números 49, 4 489, 444 889, ..., obtenidos colocando el número 48 en medio del anterior, son los cuadrados de números enteros, halle la suma de los dígitos del sexto número entero.
A) 36 B) 37 C) 38
D) 39 E) 40

11. Determine el conjunto solución del sistema:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 &= 64 \\ x^3 - 6x^2 + 12x + y &= 8 \end{aligned}$$

A) {(0, 8), (2, 1)}
B) {(0, 8), (4, -8)}
C) {(0, 8), (0, -8)}
D) {(4, -8), (2, 8)}
E) {(1, 2), (4, -8)}

12. Sea P(x) el polinomio de grado "n", donde "n" es el menor posible y cuya gráfica se representa a continuación.



Encuentre el residuo al efectuar la división de P(x) con Q(x) = x - 3
A) -6 B) -4 C) -1
D) 1 E) 4

13. Un fabricante vende un artículo al mayorista ganando p%, éste vende al minorista ganando q% y el minorista al público obteniendo una ganancia de t%. Si el precio del artículo al público es 1,716 veces el valor que cuesta fabricarlo, halle la suma de las cifras de (p + q + t)
A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

14. Tres números enteros m, n, p tienen una media aritmética de 10 y una media geométrica de $\sqrt[3]{960}$. Halle aproximadamente la media armónica de estos números, si n.p = 120.
A) 8,72 B) 9,32 C) 9,73
D) 9,93 E) 9,98

15. Las normas académicas de una institución educativa establecen las calificaciones siguientes:
Aprobado: Nota $\ge$ 14;
Desaprobado: 9 $\le$ Nota < 14 y
Reprobado: Nota < 9
En el curso de Química, las calificaciones finales fueron: 40% de aprobados, con nota promedio: 16 puntos; nota promedio de los desaprobados: 11 puntos; y nota promedio de los reprobados: 6 puntos. Si la nota promedio obtenida en el curso fue de 11 puntos, entonces el porcentaje de alumnos reprobados es:
A) 10% B) 20% C) 30%
D) 40% E) 50%

16. De un grupo de 12 profesores; 5 son de la UNI, uno de los cuales es mujer; 4 son de la UNA, uno de los cuales es mujer, y 3 son de la UNMSM, todos varones. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar ternas constituidas por un profesor de cada universidad y que no pueda haber una mujer de la UNA?
A) 0,06 B) 0,15 C) 0,18
D) 0,20 E) 0,24

17. Sea el número N = 777 .... $7_{(8)}$ de 100 cifras. Calcule la suma (expresada en base diez) de las cifras del número N^2, que está expresada en base 8.
A) 640 B) 700 C) 740
D) 780 E) 800

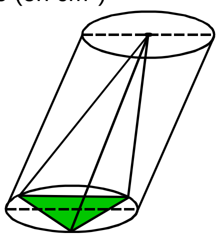
18. Clasifique como verdadero (V) o falso (F) cada una de las siguientes afirmaciones:
1. $\forall$ a, b números enteros, $\frac{a}{b}$ es un número racional.
2. $\forall$ a, b números enteros, $\frac{a+b}{1+a^2}$ es un número racional.
3. Si k $\in$ Z y k^2 es par, entonces "k" es par.
A) FVV B) FFV C) VFV
D) VFF E) FFF

19. Sea N = $\overline{abc}$ un número de tres cifras tal que $\overline{abc} = \overset{o}{7}$, $\overline{cba} = \overset{o}{11}$ y $\overline{cab} = \overset{o}{9}$.
Calcule la siguiente suma 3c+2a+b.
A) 24 B) 26 C) 28
D) 30 E) 32

20. Si la fracción $\frac{\overline{abc}}{\overline{cba}}$ es equivalente a 5/17, determine "b", sabiendo que (a)(b)(c) $\neq$ 0.
A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

21. En un triángulo ABC se cumple AB = 2 m y AC = 32 m. Calcule el perímetro del triángulo en metros, sabiendo que es un número entero y el ángulo en A es obtuso.
A) 65 B) 66 C) 67
D) 68 E) 69

22. En la figura se tiene una pirámide inscrita en un cilindro circular oblicuo. La base de la pirámide es un triángulo equilátero. El volumen de la pirámide es $\frac{27\sqrt{3}}{\pi}$ cm^3. Calcule el volumen del cilindro (en cm^3)



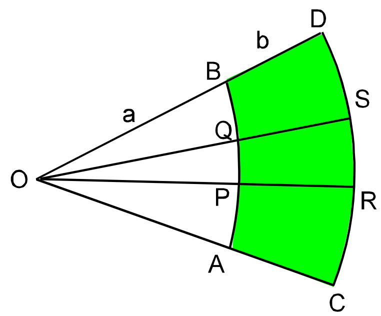
A) $\frac{27}{\pi}$ B) $\frac{54}{\pi}$ C) $\frac{108}{\pi}$
D) 54 E) 108

23. En un polígono convexo equiángulo ABCDEF se tiene AB=7, CD=6 y DE=8. Calcule BF.
A) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ B) 7 C) $5\sqrt{3}$
D) $7\sqrt{2}$ E) $7\sqrt{3}$

24. El ángulo de desarrollo de un cono circular recto mide 120°. Si la altura del cono mide 4 cm, entonces el radio (en cm) del cono es:
A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

25. En un nuevo sistema de medición angular, un ángulo de α grados sexagesimales mide α-3. Si un ángulo de π radianes mide 120 en el nuevo sistema, halle α-3.
A) 3 B) 6 C) 9
D) 12 E) 15

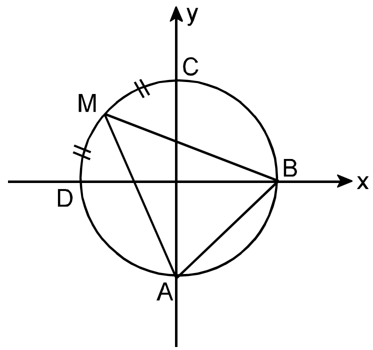
26. En la figura $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ y el área de la región sombreada es 5 veces el área del sector circular OPQ. Determine la relación. $\frac{\ell\widehat{SR}}{\ell\widehat{BA}}$



A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{16}{27}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{45}{16}$ E) $\frac{10}{3}$

27. Un punto M=(x; y) dista de un punto C=(2; 5), $\sqrt{10}$ unidades. La pendiente de la recta que pasa por M y A=(7; 5) es 1/2. Determine el punto M de mayor abscisa.
A) (-1; 4) B) (-1; 6) C) (1; 8)
D) (3; 2) E) (5; 4)

28. En el círculo trigonométrico de la figura, se tiene $\widehat{CM}=\widehat{DM}$. Entonces el área de la región triangular ABM es:



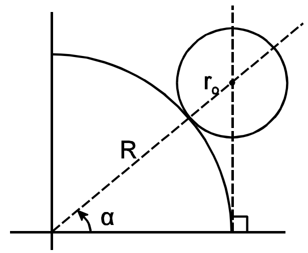
A) $2Tg\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ B) $\frac{1}{2}Tg\left(\frac{3\pi}{8}\right)$
C) $2Tg\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ D) $\frac{1}{2}Tg\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
E) $2Tg\left(\frac{4\pi}{7}\right)$

29. Simplificando la siguiente expresión:
$K=Sen^2 3ACsc^2 A+Cos^2 3ASec^3 A+2Cos4A$
se obtiene:
A) $6Cos^2 2A$
B) $6Cos2A$
C) $8Sen^2 A$
D) $12SenA$
E) $12Cos^2 2A$

30. Sea $F(x)=\frac{Senx+Tgx}{Cosx+Ctgx}$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$
Entonces podemos afirmar que:
A) F(x) toma valores positivos y negativos.
B) F(x) toma un número finito de valores negativos.
C) F(x) toma solamente valores negativos.
D) F(x) toma solamente valores positivos.
E) F(x) es constante.

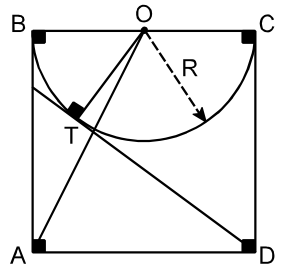
31. Dado el sistema:
$$\begin{cases} x+y=\frac{4\pi}{3} \\ Secx+Secy=1 \end{cases}$$
el valor de Cos(x - y) es:
A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{2}$
D) 1/4 E) 1/2

32. En las circunferencias tangentes de la figura, son datos r_0 (radio) y α. Determine el radio R.



A) $\left(\frac{1-Cos\alpha}{Cos\alpha}\right)r_0$ B) $\left(\frac{Cos\alpha}{1-Cos\alpha}\right)r_0$
C) $\left(\frac{1-Cos\alpha}{1+Cos\alpha}\right)r_0$ D) $\left(\frac{1+Cos\alpha}{Cos\alpha}\right)r_0$
E) $\left(\frac{1+Cos\alpha}{1-Cos\alpha}\right)r_0$

33. En la figura mostrada ABCD es un cuadrado de lado 2R, además $\overline{BC}$ es diámetro de la semicircunferencia de centro O y radio de longitud R. Si T es un punto de tangencia, entonces m∢TOA es:



A) 7,5 B) 8 C) 10
D) 10,5 E) 12,5

34. ABC es un triángulo rectángulo. Exteriormente a los catetos se construyen los triángulos equiláteros ABD y BEC, P, Q y R son puntos medios de $\overline{BE}$, $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ respectivamente. Si el área de la región triangular ABC es 32 cm^2, entonces el área de la región triangular PQR (en cm^2) es:

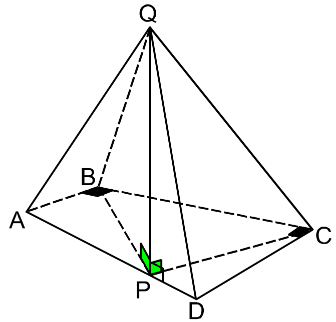
A) 4 B) 6 C) 8
D) 12 E) 16

35. Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Si dos planos son perpendiculares a dos rectas diferentes que se intersectan, entonces dichos planos también se intersectan.
II. El lugar geométrico que determinan los pies de los segmentos oblicuos de longitudes iguales trazadas desde un punto exterior a un plano es una circunferencia.
III. Toda recta es perpendicular a un plano, si es ortogonal a dos rectas diferentes no paralelas contenidas en dicho plano.

A) VVF B) VFV C) FFV
D) VVV E) FFF

36. En la figura mostrada, ABCD es un trapecio rectángulo tal que CD = BC = 2AB = 2a. Si $\overline{PQ}$ es perpendicular al plano del trapecio tal que PQ = a y los volúmenes de las pirámides Q-ABP y Q-CDP son iguales, calcule el volumen de la pirámide Q-BCP.



A) $\frac{1}{2}a^3$ B) $\frac{3}{8}a^3$ C) $\frac{4}{5}a^3$
D) $\frac{7}{8}a^3$ E) $\frac{5}{9}a^3$

37. La altura de un prisma recto mide 1 u, su base es una región limitada por un rombo cuyo lado mide 2 u y su ángulo agudo mide 30°. Por un lado de la base se traza un plano que interseca al prisma y está inclinado un ángulo de 60° con respecto de la base, luego el área de la sección (en u^2) que resulta en el prisma es:

A) $2\sqrt{3}$ B) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{4}{\sqrt{3}}$
D) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

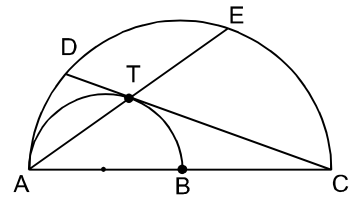
38. Se tiene un polígono convexo de 8 lados circunscrito a una circunferencia. Si las longitudes de sus lados están en progresión geométrica de razón r, determine r^2+3r.

A) 1 B) 4 C) 10
D) 18 E) 28

39. Se da un triángulo ABC cuyos lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ miden 8 m y 6 m, respectivamente. Sobre $\overline{AB}$ se toma el punto D.
Si m∢BAC = m∢BCD, entonces AD es:

A) 3,5 B) 4 C) 4,5
D) 5 E) 5,5

40. En figura, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son diámetros, $\overline{CT}$ es tangente al arco $\overset{\frown}{AB}$, AB = BC = 2r y ET = 4. Calcule r.



A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{6}$ E) $3\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN

01. Aplicando el teorema:

$|x| = |y| \Rightarrow x = y \ \vee \ x = -y$

$|x - a + b| = |x + a - b|$

$x - a + b = x + a - b \vee x - a + b = -x - a + b$

$\Rightarrow b = a \qquad \vee \qquad 2x = 0$

$x = 0$

Rpta. D

02. i) $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{13}{6}$

ii) $x^2 + y^2 = 5$

De (i):

$6x^4 - 13x^2y^2 + 6y^4 = 0$

$$\begin{array}{ll} 3x^2 & -2y^2 \\ 2x^2 & -3y^2 \end{array}$$

$\Rightarrow 3x^2 = 2y^2 \ldots (\alpha) \ \vee \ 2x^2 = 3y^2 \ldots (\beta)$

(β) en (ii):

$\dfrac{3y^2}{2} + y^2 = 5 \Rightarrow y = \sqrt{2} \vee y = -\sqrt{2}$

$\Rightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

Como: $x < 0 < y \ \wedge \ |y| < |x|$

$\Rightarrow x = -\sqrt{3}; \ \ y = \sqrt{2}$

$S = \sqrt{2}y + \sqrt{3}x = \sqrt{2}(\sqrt{2}) + \sqrt{3}(-\sqrt{3})$

$S = -1$

Rpta. B

03. Sea el polinomio:

$P(x) = a_0(x + 2a)(x)(x - 2a)$

$P(a) = a_0(3a)(a)(-a)$

$20 = a_0(-3a^3) \Rightarrow \boxed{a_0 = -\dfrac{20}{3a^3}}$

$\Rightarrow P(x) = -\dfrac{20}{3a^3}(x + 2a)(x)(x - 2a)$

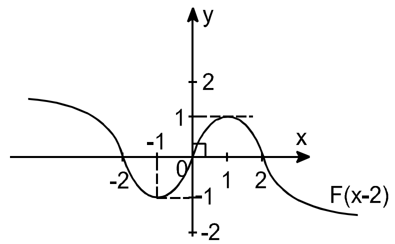
Luego:

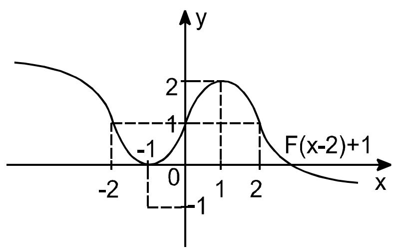
$P(-3a) = -\dfrac{20}{3a^3}(-a)(-3a)(-5a)$

$\Rightarrow \sqrt{P(-3a)} = \sqrt{100} \Rightarrow \sqrt{P(-3a)} = 10$

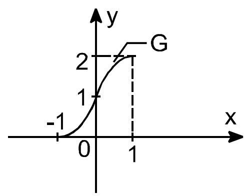
Rpta. D

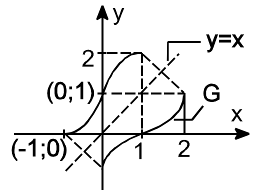
04.





Como: $-1 \le x \le 1 \Rightarrow |F(x-2)+1|$ es:





Rpta. C

05.

$$\begin{array}{c} \ \ +\ \ -\ \ +\ \ - \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \end{array} \quad \rightarrow \text{fila 1}$$

por menores complementarios en la fila (1):

$$1\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ x & 0 & c \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} x & a & 0 \\ x & 0 & 0 \\ x & 0 & c \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} x & a & 0 \\ x & 0 & b \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow abc - bcx - acx - abx = 0$

$abc = (ab + bc + ac)x$

$\therefore x = \dfrac{abc}{ab + bc + ac}$

Rpta. B

06. $x - 3y \le 6$ .... (I)

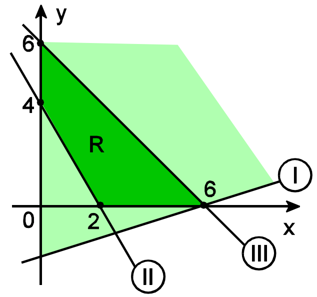
$2x + y \ge 4$ .... (II)

$x + y \le 6$ .... (III)

$x \ge 0$

$y \ge 0$

Graficando:



$\therefore$ R es un región cuyo borde es un cuadrilátero.

Rpta. C

07. $(2^x - x)(3^x - \mathrm{Log}_3 x)(x^2 - 9)(3^x - 9) > 0$

Restricción: $x > 0$ .... (u)

Factorizando y analizando:

$\underbrace{(2^x - x)}_{+}\underbrace{(3^x - \mathrm{Log}_3 x)}_{+}\underbrace{(x + 3)}_{+}(x - 3)(3^x - 9) > 0$

$\Rightarrow (x - 3)(3^x - 9) > 0$

I. $x - 3 > 0 \ \wedge \ 3^x > 3^2$

$x > 3 \ \wedge \ x > 2 \Rightarrow x > 3 \cap u \Rightarrow x > 3$ .. $C.S_I$

II. $x - 3 < 0 \wedge 3^x < 3^2$

$x < 3 \wedge x < 2 \Rightarrow x < 2 \cap u \Rightarrow 0 < x < 2$ ..$C.S_{II}$

Uniendo:

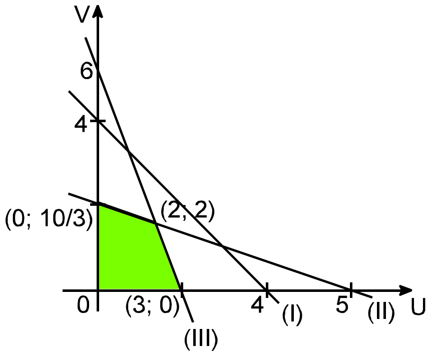
$C.S = \langle 0; 2\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$

$\therefore a + b + c = 5$

Rpta. E

08. $U(u; v) = 200u + 300v$
$u + v \leq 4$ (I)
$2u + 3v \leq 10$ (II)
$40u + 20v \leq 120$ (III)

Graficando:



$U(0; 10/3) = 1\,000$
$U(2; 2) = 1\,000$
$U(3; 0) = 600$

Como se obtiene el óptimo en dos vértices consecutivos, la utilidad es máxima para todos los puntos que pertenecen al segmento que une los vértices $\left(0; \frac{10}{3}\right)$ y (2; 2) de los cuales elegimos (2; 2)

Rpta. C

09.
$S = 2 + 6 + 12 + 20 + \ldots$ (100 sumandos)

$S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + 100.101$
$S = \frac{100.101.102}{3} = 343\,400$

Rpta. E

10. El sexto término:

$N = 444444888889 = 444444888888 + 1$

$N = 444444 \cdot 10^6 + 888888 + 1$

$N = \frac{4}{9}(10^6-1) \cdot 10^6 + \frac{8}{9}(10^6-1) + \frac{9}{9}$

$N = \frac{4.10^{12} + 4.10^6 + 1}{9} = \frac{(2.10^6+1)^2}{9}$

$\Rightarrow \sqrt{N} = \frac{2.10^6+1}{3} = 666667$

$\therefore$ Suma de cifras = 37

Rpta. B

11. Del sistema:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 68 \quad \ldots\ldots \; (1) \\ (x-2)^3 + y = 0 \quad \ldots\ldots \; (2) \end{cases}$$

(2) en (1) : $(x-2)^2 + (x-2)^6 = 68$

Resolviendo:

$(x-2)^2 = 4 \Rightarrow x-2 = 2 \;\vee\; x-2 = -2$
$x = 4 \;\vee\; x = 0$

Si: $x=4 \Rightarrow y=-8 \Rightarrow (4; 8)$ es solución

Si: $x=0 \Rightarrow y= 8 \Rightarrow (0; 8)$ es solución

$\therefore$ C.S. = {(0; 8) ; (4; -8)}

Rpta. B

12. Del gráfico:

$P(x) = a(x-1)^2 (x-2)$ (Grado mínimo)
$(0; 2) \in P \Rightarrow a = -1$
$\Rightarrow P(x) = -(x-1)^2 (x-2)$

Se pide el residuo de: $\frac{P(x)}{x-3}$

Por Teorema del resto:
$R(x) = P(3) = -(3-1)^2(3-2) = -4$

Rpta. B

13. $(100+p)\%(100+q)\%(100+t)\% = 1{,}716$
$(100+p)(100+q)(100+t) = 1\,716\,000$

1ra posibilidad:
$(100+p)(100+q)(100+t) = 110.120.130$

$p = 10$
$q = 20$
$t = 30$
$p+q+r = 60 \rightarrow \sum$cifras = 6

Rpta. A

2da posibilidad:
$(100+p)(100+q)(100+t) = 104.125.132$
$p = 4$
$q = 25$
$t = 32$
$p+q+r = 61 \rightarrow \sum$cifras = 7

Rpta. B

Nota: Considerando p; q y r enteros hay dos soluciones.
Si p; q y r no son enteros, habrían infinitas soluciones.

14. $M.A(m, n, p) = 10 \Rightarrow m+n+p = 30$
$M.G(m, n, p) = \sqrt[3]{960} \Rightarrow m \times n \times p = 960$
Pero: $n \times p = 120 \Rightarrow m = 8$
Luego: $n+p = 22 \wedge n \times p = 120$
Sólo: $n = 10 \wedge p = 12$
$M.H(m, n, p) = \frac{3 \times 8 \times 10 \times 12}{80+96+120} = 9{,}73$

Rpta. C

15. Consideremos el total: 100
Del enunciado:

	Nota promedio	Cantidad
Aprobados	16	40
Desaprobados	11	60-m
Reprobados	6	m

Dato: Nota promedio del curso = 11

$\frac{16 \times 40 + 11(60-m) + 6m}{100} = 11$

Resolviendo: m = 40
$\therefore$ Reprobó el 40%

Rpta. D

16. 12 profesores

UNI	UNA	UNMSM
4H y 1M	3H y 1M	3H

Casos posibles:
Se selecciona una terna (3 profesores):
$C_3^{12} = 220$ formas.

Casos favorables:
Se selecciona uno de cada universidad y no hay una mujer de la UNA:

$5\cdot 3\cdot 3 = 45$ formas

Piden:

$$P=\frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}=\frac{45}{220}=0{,}20\overset{\frown}{45}$$

Rpta. D

17. $N = 8^{100} - 1$
$N^2 = 8^{200} - 2.8^{100} + 1$
Luego:

$$\begin{array}{rr|r|r}
 & & \overbrace{\quad}^{\text{100 cifras}} & \overbrace{\quad}^{\text{100 cifras}} \\
 & 1 & 000\ldots000 & 000\ldots000_8\ - \\
 & & 2 & 000\ldots000_8 \\
\hline
 & & 777\ldots776 & 000\ldots000_8\ + \\
 & & & 1 \\
\hline
N = & & 777\ldots776 & 000\ldots001_8
\end{array}$$

$\therefore\ \Sigma_{cifras} = 99.7 + 6 + 1 = 700$

Rpta. B

18. 1. Falso:
$\frac{a}{b}$ es racional si y solo si a y b son enteros y b es diferente de cero.
2. Verdadero:
$\forall\ a, b \in Z,\ a + b \in Z$
$\forall\ a \in Z,\ a^2 \geq 0 \wedge a^2 \in Z \Rightarrow a^2 + 1 \in Z$
$\therefore\ \frac{a+b}{a^2+1}$ es racional
3. Verdadero:

$$k \in Z \wedge k^2 = \overset{\circ}{2}$$
$$\downarrow$$
$$(\overset{\circ}{2})^2 = \overset{\circ}{2}$$

$\therefore\ k = \overset{\circ}{2}$

Rpta. A

19. Por criterios de divisibilidad:

$\overline{abc} = \overset{\circ}{7}$

$\overset{+-+}{\overline{cba}} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow \overline{abc} = \overset{\circ}{11}$

$\overline{cab} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow \overline{abc} = \overset{\circ}{9}$

Luego: $\overline{abc} = \overset{\circ}{\overline{MCM(7;\,11;\,9)}}$

$\overline{abc} = \overset{\circ}{693} = 693.K$
$\qquad\qquad\qquad\downarrow$
$\qquad\qquad\qquad 1$

$\Rightarrow \overline{abc} = 693$
$\therefore\ 3c + 2a + b = 30$

Rpta. D

20. $\dfrac{\overline{abc}}{\overline{cba}} = \dfrac{5}{17}\ \begin{cases}\overline{abc} = 5K\\ \overline{cba} = 17K\end{cases}$

Siendo $\overline{abc} = \overset{\circ}{5}$, entonces c = 5, luego:

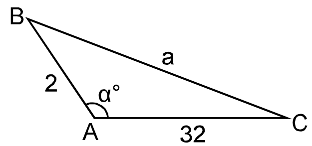
$\overline{cba} - \overline{abc} = 12K$

$\cancel{99}(c - a) = \cancel{12}K$
$33(c - a) = 4K$
$\ \downarrow\quad\ \downarrow\qquad\ \downarrow$
$\ 5\quad\ 1\qquad 33$

$\overline{abc} = 5.33 = 165$
$\therefore\ b = 6$

Rpta. D

21.



Dato: α>90° y el perímetro es un número entero.
Se pide el perímetro del triángulo, siendo entero, se concluye que "a" también es entero.
Como α>90, entonces BC es el mayor lado del triángulo, luego:

$a>32$ ......(1)

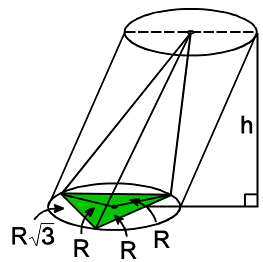
Por desigualdad triangular en el ΔABC:

$32-2<a<32+2$
$30<a<34$ ......(2)

De (1) y (2): a = 33
$\therefore$ El perímetro es 67

Rpta. C

22.



Dato: $V_{pirámide} = \dfrac{27\sqrt{3}}{\pi}$

Piden: $V_{cilindro} = ?$

$V_{pirámide} = \dfrac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}\times h = \dfrac{27\sqrt{3}}{\pi}$

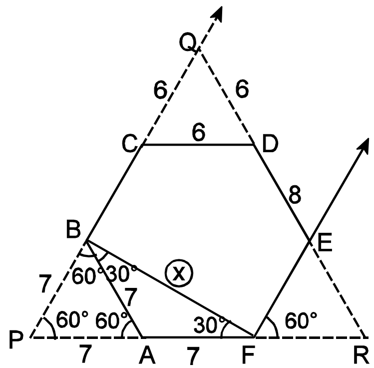
$R^2h = \dfrac{108}{\pi}$

$V_{cilndro} = \pi R^2 h = \pi.\dfrac{108}{\pi}$

$\therefore\ V_{cil} = 108$

Rpta. E

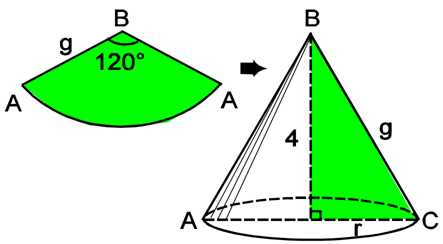
23.



Al prolongar los lados se forman triángulos equiláteros: $\overline{PQ}//\overline{EF}$
PF=QE
$7+AF= 6+8 \Rightarrow AF=7$
En el ⊿ PBF : $x = 7\sqrt{3}$
(30; 60)

Rpta. E

24.



Sabemos que: $r = g \cdot \dfrac{\alpha}{360}$

$r = g \cdot \dfrac{120}{360} \Rightarrow g = 3r$

Luego por Pitágoras:

$g^2 = r^2 + 4^2$

$(3r)^2 = r^2 + 16$

$\therefore\ r = \sqrt{2}$

Rpta. B

25. Sea la unidad angular del nuevo sistema (a)

$\Rightarrow \alpha° <> (\alpha - 3)^a$

Luego:

$\pi \text{ rad} <> 120^a$

Entonces:

$\dfrac{\alpha}{180} = \dfrac{\alpha - 3}{120}$

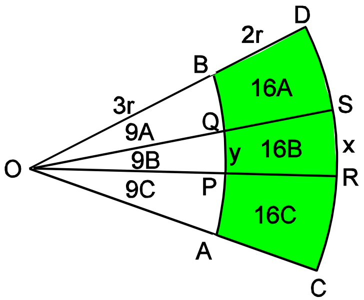
Resolviendo: $\alpha = 9$

Luego lo pedido es:

$\therefore\ \alpha - 3 = 6$

Rpta. B

26.



Dato:

$16(A + B + C) = 5(9B)$

$A + B + C = \dfrac{45B}{16}$

Calculando $x \wedge y$:

$x = \dfrac{10B}{r}$

$y = \dfrac{6(A+B+C)}{r}$

Luego:

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{\dfrac{10B}{r}}{\dfrac{6(A+B+C)}{r}}$

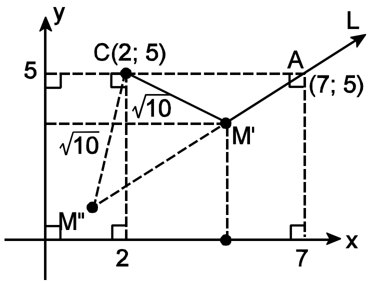
$\dfrac{x}{y} = \dfrac{5B}{3(A+B+C)} = \dfrac{5B}{3 \cdot \dfrac{45B}{16}}$

Luego lo pedido:

$\therefore\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{27}$

Rpta. B

27. Del gráfico:



I. $\dfrac{y-5}{x-7} = \dfrac{1}{2}$

II. $(x-2)^2 + (y-5)^2 = \sqrt{10}^2$

Resolviendo se hallan los puntos:

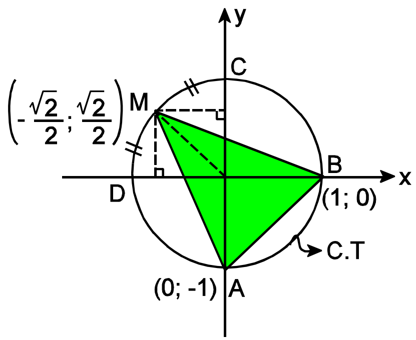
- M' (5; 4)
- M" (1; 2)

Del dato M de mayor abscisa, entonces:

M(5; 4)

Rpta. E

28. Del gráfico:



De la figura el área:

$S = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$S = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$

$S = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{Csc}\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{Ctg}\dfrac{\pi}{4}\right)$

$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{Ctg}\dfrac{\pi}{8}$

$\therefore\ S = \dfrac{1}{2}\mathrm{Tg}\dfrac{3\pi}{8}$

Rpta. B

29.

$K = \mathrm{Sen}^2 3A\,\mathrm{Csc}^2 A + \mathrm{Cos}^2 3A\,\mathrm{Sec}^2 A + 2\mathrm{Cos}4A$

Resolviendo:

$K = \left(\dfrac{\mathrm{Sen}3A}{\mathrm{Sen}A}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{Cos}3A}{\mathrm{Cos}A}\right)^2 + 2\mathrm{Cos}4A$

$K = \underbrace{(2\mathrm{Cos}2A+1)^2 + (2\mathrm{Cos}2A-1)^2}_{\text{Por Legendre}} + 2\mathrm{Cos}4A$

$K = 8\mathrm{Cos}^2 2A + 2 + 2\mathrm{Cos}4A$

$K = 8\mathrm{Cos}^2 2A + 2 + 2(2\mathrm{Cos}^2 2A - 1)$

$K = 8\mathrm{Cos}^2 2A + 2 + 4\mathrm{Cos}^2 2A - 2$

$\therefore\ K = 12\mathrm{Cos}^2 2A$

Rpta. E

30. $F(x) = \dfrac{\mathrm{Sen}x + \mathrm{Tg}x}{\mathrm{Cos}x + \mathrm{Ctg}x};\ x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

Resolviendo:

$F(x) = \dfrac{\mathrm{Sen}x + \dfrac{\mathrm{Sen}x}{\mathrm{Cos}x}}{\mathrm{Cos}x + \dfrac{\mathrm{Cos}x}{\mathrm{Sen}x}}$

$F(x) = \dfrac{\mathrm{Sen}x\left(\dfrac{1+\mathrm{Cos}x}{\mathrm{Cos}x}\right)}{\mathrm{Cos}x\left(\dfrac{1+\mathrm{Sen}x}{\mathrm{Sen}x}\right)}$

$F(x) = \mathrm{Tg}^2 x\left(\dfrac{1+\mathrm{Cos}x}{1+\mathrm{Sen}x}\right)$

$F(x) = (+)$

$\therefore$ F(x) toma sólo valores positivos.

Rpta. D

31. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{4\pi}{3} \text{ .... (1)}\\ \operatorname{Sec}x+\operatorname{Sec}y=1 \text{ ..... (2)}\end{cases}$$

De (2):

Cosx + Cosy = CosxCosy

$$4\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)=\cos(x+y)+\cos(x-y)$$

Reemplazando:

$$4\cos\frac{2\pi}{3}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\cos(x-y)$$

$$-2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=-\frac{1}{2}+2\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)-1$$

Resolviendo:

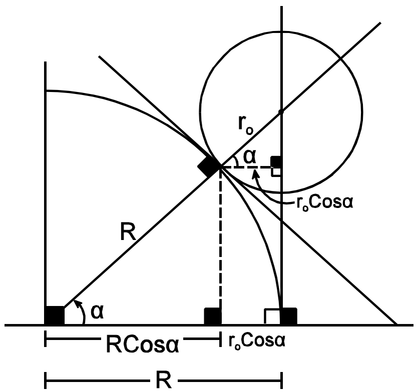
$$\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\cos(x-y)=2\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)-1$$

$$\therefore\ \cos(x-y)=-\frac{1}{2}$$

Rpta. C

32.



Del gráfico:

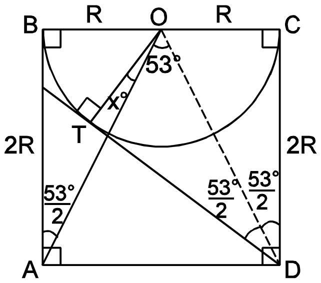
R = RCosα + r$_o$Cosα
R(1 - Cosα) = r$_o$Cosα

Resolviendo:

$$R=\left(\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right)r_o$$

Rpta. B

33.



Los triángulos ABO y OCD son aproximados de 53°/2; $\overline{OD}$ es bisectriz del ∢CDT, además m∢AOD = 53.

⊿DTO: $x+53+\frac{53}{2}=90$

$\therefore\ x=10{,}5$

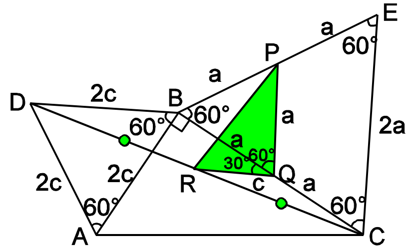
Rpta. D

34. Piden: S_{PQR}

Sea: AB = 2c ∧ BC = 2a

$$S_{ABC}=\frac{(2c)(2a)}{2}=32$$

ac = 16 .... (I)



Ahora por el teorema de la base media:

- PQ = a y m∢BQP = 60
- RQ = c y m∢RQB = 30

Finalmente:

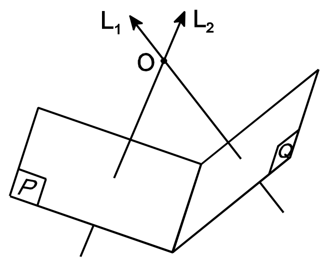
$$S_{PQR}=\frac{a.c}{2}\ \text{................ (II)}$$

Reemplazando (I) en (II):

$\therefore\ S_{PQR}=8$

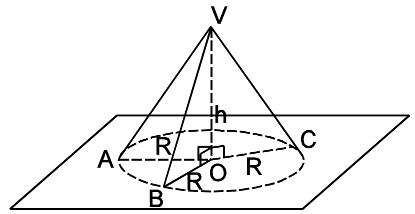
Rpta. C

35. I. Verdadero



Los planos P y Q se intersecan; ya que si fueran paralelos las rectas L_1 y L_2 coincidirían.

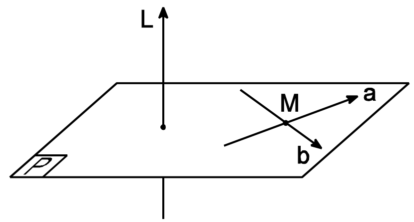
II. Verdadero



Sean A, B y C tres puntos del lugar geométrico, luego por la congruencia de los triángulos VOA, VOB y VOC estos puntos equidistan de O.

∴ El lugar geométrico es una circunferencia.

III. Verdadero



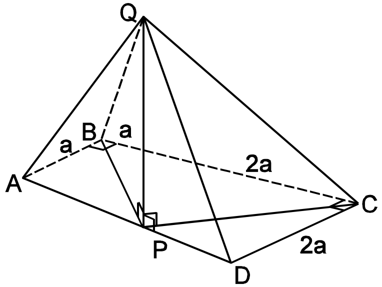
Por definición de recta perpendicular a un plano:

$$\text{si: }\begin{cases}\overline{L}\perp(\overline{a}\wedge\overline{b})\\(\overline{a}\wedge\overline{b})\subset P\\ \overline{a}\cap\overline{b}=\{M\}\end{cases}$$

$\Rightarrow\ \overline{L}\perp P$

Rpta. D

36. Se pide el volumen de la pirámide Q - BCP.

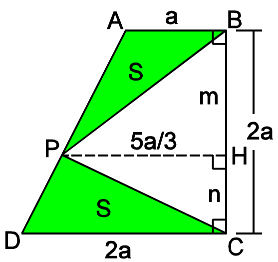


Dato: Los volúmenes de las pirámides Q - ABP y Q - CDP son iguales.

Observe que las pirámides Q-ABP y Q-CDP tienen la misma altura, luego al tener el máximo volumen entonces las áreas de sus bases son iguales, es decir:

$$S_{ABP} = S_{DPC}$$

En la base:



$$S = \frac{a.m}{2} = \frac{2a.n}{2}$$

$$\Rightarrow\ m = 2n$$

Luego por propiedad:

$$PH = \frac{a.n + 2a.m}{m + n}$$

$$PH = \frac{5a}{3}$$

Finalmente:

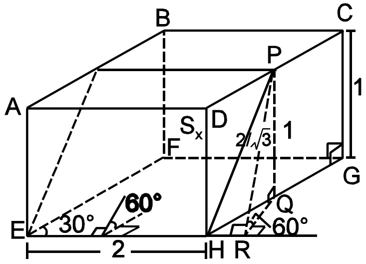
$$V_{Q\text{ - }BCP} = \frac{1}{3}S_{BCP}\,.\,QP$$

$$V_{Q\text{ - }BCP} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}.2a.\frac{5a}{3}\right)a$$

$$\therefore\ V_{Q\text{ - }BCP} = \frac{5a^3}{9}$$

Rpta. E

37.



Sea el prisma recto cuya base es un rombo de lado 2. Sea S_x el área de la sección determinada en el prisma por un plano que forma con la base un ángulo diedro de 60°, en el ◺PQR (notable de 30° y 60°): $PR = \frac{2}{\sqrt{3}}$

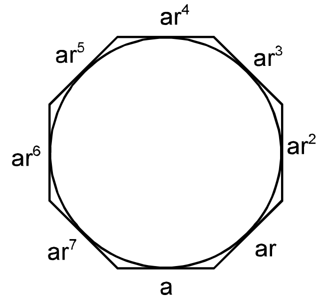
Luego $S_x = EH \times PR = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$$\therefore\ S_x = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Rpta. C

CENTRO DE ESTUDIO PITÁGORAS EXAMEN DE ADMISIÓN 2009-I
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

38.



Nos piden: $x = r^2 + 3r$

Por el teorema de Pitot:

$a + ar^2 + ar^4 + ar^6 = ar + ar^3 + ar^5 + ar^7$

$1 + r^2 + r^4 + r^6 = r(1 + r^2 + r^4 + r^6)$

$r = 1$

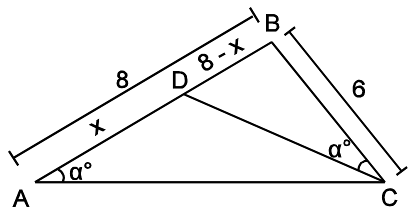
Nos piden: $x = r^2 + 3r$

$x = 1^2 + 3(1)$

$\therefore\ x = 4$

Rpta. B

39.



Por dato:

AB = 8; BC = 6 y m∢A = m∢BCD

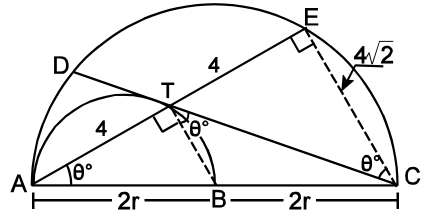
Luego por teorema:

$$6^2 = 8(8 - x)$$

$$\therefore\ x = 3{,}5$$

Rpta. A

40.



Al trazar $\overline{BT}$: $\overline{BT} \perp \overline{AE}$

$$\Rightarrow\ AT = TE = 4$$

Ángulo inscrito y ángulo semi-inscrito

m∢TAB = m∢BTC = θ

Como $\overline{BT} // \overline{EC}$: m∢TCE=θ

Por propiedad:

$$(EC)^2 = 8\ .\ 4$$

$$EC = 4\sqrt{2}$$

En ΔAEC:

$$(4r)^2 = (8)^2 + (4\sqrt{2})^2$$

$$\therefore\ r = \sqrt{6}$$

Rpta. D