MATEMÁTICA

01. Sea la sucesión:

$a_1 = 0,\ a_2=1,\ a_3=\frac{1}{2},\ a_4=\frac{3}{4},\ a_5=\frac{5}{8},$

$a_6=\frac{11}{16},\ a_7=\frac{21}{32},\ a_8=\frac{43}{64}$, ... , entonces la sucesión $\{a_n\}$ converge a:

A) $\frac{7}{12}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{2}{3}$
D) 1 E) ∞

02. En un colegio el 60% aprobó Aritmética, el 32% aprobó Álgebra y los que aprobaron Aritmética y Álgebra representan el 60% de los que no aprobaron ninguno de los dos cursos. Si 42 aprobaron Aritmética y Álgebra, calcule el número de alumnos del colegio.

A) 340 B) 350 C) 360
D) 370 E) 380

03. Dadas las funciones:

F ={(3, 1), (2; -3), (5, 0), (4, -4), (1, 1)}
G={(-4, 3), (-2; 7), (0,0), (1, 5), (2, 1)} y
H= {(1, -4), (3; -2), (5, 0), (7, 2)}

Determine la función compuesta (F o G) o H

A) {(1, 0), (5; 1)}
B) {(3, -3), (5; -4)}
C) {(1, 1), (7; 1)}
D) {(1, 1), (2; -3)}
E) {(3, -1), (7; 1)}

04. Considere la ecuación matricial:

$X\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, donde X es una matriz. Calcule det(X)

A) 6 B) 7 C) 8
D) 11 E) 19

05. En una biblioteca municipal existen en total 72 libros de matemática y literatura. Los que están en relación de 5 a 3, respectivamente. El número de libros de literatura que deben agregarse para que la relación sea de 9 a 10 es:

A) 21 B) 22 C) 23
D) 24 E) 25

06. Un libro se ofrece en venta recargándose el "r" por ciento del precio de costo, pero a un estudiante al comprarlo le rebajaron el "p" por ciento. Si el vendedor no ganó ni perdió, ¿cuánto le rebajaron al estudiante?

A) $\frac{100}{(100+r)}$ B) $\frac{r+100}{100r}$ C) $\frac{(100+r)}{r}$

D) $\frac{1}{\left(0{,}01+\frac{1}{r}\right)}$ E) $\frac{1}{\left(0{,}01-\frac{1}{r}\right)}$

07. Un deudor tiene que pagar al banco tres letras. La primera de S/. 80 000 pagadera dentro de 30 días; la segunda de S/. 200 000 pagadera en 60 días y la tercera de S/. 400 000 con un plazo de 90 días. ¿Dentro de qué tiempo (en días) debe ser pagada una letra única cuyo valor nominal sea la suma de los valores nominales de las tres letras?
Suponga que la tasa de interés es constante.

A) 70 días B) 71 días C) 72 días
D) 73 días E) 74 días

08. ¿En cuántos sistemas de numeración el número 1234 se escribe con tres cifras?

A) 23 B) 24 C) 25
D) 26 E) 27

09. Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

I. La suma de un número natural y un número entero es un número natural.
II. Sean a y b dos números enteros, entonces existe un número c entero tal que a = bc.
III. La cantidad de elementos del conjunto de los números enteros positivos múltiplos de siete, es igual a la cantidad de elementos del conjunto de los números naturales.

A) VVV B) VFF C) FVV
D) FFV E) FFF

10. Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

I. Si m y n son números enteros no divisibles por 3, entonces la suma o la diferencia de ellos es un múltiplo de tres.
II. Si m y n son múltiplos de 3 con m > n > 0, entonces el cociente m/n es un múltiplo de tres.
III. Si m y n son múltiplos de tres con m, n > 0, entonces MCD (m, n) es un múltiplo de tres.

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FVF E) FFF

11. Sean los números:

$N_1 = 6^{3a+1} \times 8^a,\ N_2 = 8^a \times 3^{3a+1}$

donde la cantidad de los divisores de N_1 es igual a la cantidad de los divisores de N_2 aumentado en 20. Entonces el valor de 2a - 1 es:

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

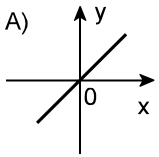
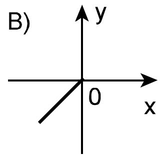
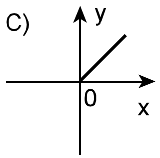
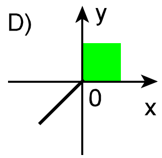
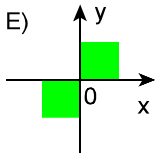
12. Determine el valor de a + b - c si se tiene que $\overline{(ab)}^3 = \overline{1c8ab}$

A) -1 B) -2 C) 1
D) 2 E) 3

13. Dada la siguiente relación:

$$y - |y| = x - |x|$$

diga cuál de las siguientes gráficas es la que le corresponde:

A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

14. Si las raíces de la ecuación:

$$x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$$

son $x_1 = 3$, $x_2 = 5$; y las raíces de la ecuación:

$$y^2 - (a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad - bc)^3 = 0$$

son y_1, y_2. Entonces el valor de $y_1^2y_2+y_1y_2^2$ es:

A) 213 000 B) 313 000 C) 413 000
D) 513 000 E) 613 000

15. Sean A, B conjuntos no-vacíos.
Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):
I. Si:
$(x,y);\ (x,z) \in F=\{(x,y)/x \in A, y \in B\} \subset A\times B$ implica que y=z, entonces podemos decir que F es una función de A en B.
II. Toda función sobreyectiva $F:A\rightarrow B$ es inyectiva.
III. Toda función inyectiva $F:A\rightarrow B$ es sobreyectiva.
A) VVV B) VFV C) VFF
D) FFV E) FFF

16. Dadas las siguientes proposiciones:
I. Las raíces de e^{in} -1=0, pertenecen a un polígono regular de n lados, $\forall\, n \in \mathbb{N}$
II. Si $e^{i\theta}$ =a+bi y $\theta \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$, entonces $a \in \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$ y $b \in \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right\rangle$
III. Dados α, β ∈ <0, 2π>, tales que β>α, si Cos(α)=Cos(β), entonces $e^{i(\alpha+\beta)}=1$
Indique cuáles son correctas:
A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y II E) II y III

17. Sea S el conjunto solución de la ecuación en $\mathbb{R}$,
$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = \frac{1}{\mathrm{Log}_x\left(\frac{3}{5}\right)}$$
Halle la cantidad de elementos de S.
A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

18. Si $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $S=A^{42}+A^{55}$

A) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

19. Dado el sistema:
$$2x-y+z = 1$$
$$x+4y+2z = -1$$
¿cuál de las siguientes ecuaciones:
I. x - 5y - z = 2
II. 3x+3y+3z=2
III. 5x+2y+4z=1
puede agregarse al sistema anterior de modo que el conjunto solución no varíe?
A) Sólo I B) I y II C) I y III
D) Sólo II E) Sólo III

20. En relación a un programa lineal, indique la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):
I. Las condiciones de no negatividad significan que todas las variables de decisión deben ser positivas.
II. El número de puntos extremos de la región admisible es finito.
III. En un programa lineal pueden variarse los coeficientes de la función objetiva y aún mantenerse la solución óptima.
A) VFV B) FFF C) FFV
D) FVV E) VFF

21. En un triángulo ABC, a = Sen27°, c = Cos26°, m∢(A + C) = 153°30' y Sen1° = $\frac{7}{400}$. Calcule el área aproximada de la región limitada por el triángulo ABC (en u^2).
A) $\frac{97\sqrt{5}}{4\,000}$ B) $\frac{107\sqrt{5}}{4\,000}$ C) $\frac{117\sqrt{5}}{4\,000}$
D) $\frac{227\sqrt{5}}{4\,000}$ E) $\frac{327\sqrt{5}}{4\,000}$

22. Determine la suma de todas las soluciones que se encuentran en el intervalo [0; 2π] de la ecuación $2Sen^3x + Sen^2x - 2Senx - 1 = 0$
A) 5π B) $\frac{5\pi}{2}$ C) 3π
D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{3\pi}{4}$

23. Calcule el valor de:
$$E = (-2)\mathrm{ArcSen}\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{33}{5}\pi\right)\right)$$
A) $\frac{\pi}{13}$ B) $\frac{\pi}{11}$ C) $\frac{\pi}{9}$
D) $\frac{\pi}{7}$ E) $\frac{\pi}{5}$

24. Cuando el ángulo de elevación del Sol es de 60°, un poste inclinado en 15° desde la vertical, proyecta una sombra de 20 m. Determine la longitud del poste.
A) 26,1 B) 25,5 C) 24,5
D) 23,2 E) 22,5

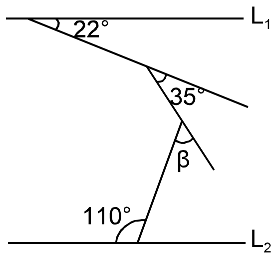
25. Después de una rotación de ejes, la ecuación $5x^2 - 8xy + 5y^2 - 9 = 0$ representa una elipse cuyos focos tienen como coordenadas $F_1(a, b)$, $F_2(c, d)$. Calcule ac + bd.
A) -2 B) -3 C) -4
D) -6 E) -8

26. Si A, B y C son los ángulos agudos de un triángulo, calcule el valor de la siguiente expresión:
$$F = \frac{Sen2A + Sen2B + Sen2C}{SenA\,.\,SenB\,.\,SenC}$$
A) 0 B) 1 C) 2
D) 4 E) 8

27. De un círculo de papel de radio 10 cm se corta un sector circular POQ y pegando los bordes OP y OQ se obtiene un envase cónico. Calcule el ángulo "θ" del sector POQ para que el envase tenga una profundidad de 8 cm.
A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{5\pi}{6}$ C) $\frac{6\pi}{5}$
D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{8\pi}{5}$

28. Simplificando la expresión siguiente:
$$K = \left(\frac{-Tg343° - Tg107°}{Tg197° + Tg73°}\right)Tg163°$$
se obtiene:
A) -Tg17° B) Ctg17° C) Tg34°
D) Tg51° E) Ctg34°

29. Halle la medida del ángulo "β" indicado en la figura mostrada, donde las rectas L_1 y L_2 son paralelas.



A) 51° B) 53° C) 55°
D) 57° E) 59°

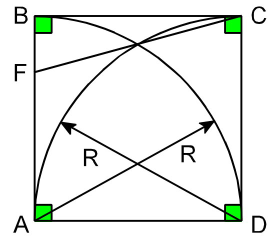
30. En un triángulo ABC, denote por I al incentro y por O a la intersección de la bisectriz interior del ángulo A con la bisectriz exterior del ángulo C. Si m∢AIC + m∢COA = 150°, halle m∢COA.

A) 20° B) 25° C) 30°
D) 35° E) 40°

31. En un cuadrilátero ABCD, las prolongaciones de los lados $\overline{BA}$ y $\overline{CD}$ se intersecan en M (A ∈ $\overline{BM}$) y las prolongaciones de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en N (C ∈ $\overline{BN}$). Si los ángulos BAD y BCD miden 70° y 80° respectivamente, determine el ángulo que forman las bisectrices interiores de los ángulos AMC y ANC.

A) 90° B) 100° C) 105°
D) 110° E) 115°

32. En la figura mostrada calcule BF (en cm), si el lado del cuadrado mide $(2+\sqrt{3})$ cm.



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) 1 E) $\sqrt{2}$

33. En el triángulo isósceles ABC (AB = BC = 10 cm), la ceviana $\overline{AN}$ (N ∈ $\overline{BC}$) corta a la altura $\overline{BM}$ (M ∈ $\overline{AC}$) en el punto P. Si AC = 16 cm y BN = 2 cm, determine el área de la región triangular APB (en cm^2)

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

34. En un triángulo ABC, sobre la prolongación de $\overline{AC}$ se toma el punto D de tal forma que 4m∢BAC= m∢CDB.

Si 5m∢BAC = m∢ACB, BD = $\frac{10}{\sqrt{3}}$ cm y

CD = $\left(\frac{20}{\sqrt{3}}-10\right)$ cm, halle AC (en cm).

A) $10\sqrt{3}$ B) 20 C) $12\sqrt{3}$
D) 22 E) $13\sqrt{3}$

35. Halle el perímetro de la sección que determina un plano secante a un tetraedro regular ABCD, sabiendo que pasa por los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ y es paralelo a $\overline{BD}$ (a: longitud de la arista del tetraedro regular)

A) $\frac{a}{2}$ B) a C) $\frac{3}{2}a$
D) 2a E) $\frac{5}{2}a$

36. En una circunferencia de radio 6 cm, se tiene que la longitud de arco de un ángulo central α es ℓ_1 y la longitud de arco de un ángulo central β es ℓ_2. Si $\ell_1 - \ell_2 = \frac{\pi}{3}$ y los ángulos α y β son complementarios, halle el valor del mayor ángulo.

A) 50° B) 55° C) 60°
D) 65° E) 70°

37. En un triángulo, el área de la región circular determinada por la circunferencia inscrita es 9π u^2. Si el área de la región triangular es $\frac{9(\sqrt{2}+2)^2}{2}u^2$, determine el perímetro del triángulo.

A) $6(1+\sqrt{2})$ u B) $6(1+2\sqrt{2})$ u
C) $6(2+\sqrt{2})$ u D) $6(2+2\sqrt{2})$ u
E) $6(3+2\sqrt{2})$ u

38. Considere un embudo compuesto por un tronco de cono de altura 12 cm y radios de sus bases 5R cm y R cm y un cilindro de radio R cm y altura 5 cm. Si el embudo puede contener 129π cm^3 de agua, halle R (en cm)

A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

39. Sobre un rectángulo ABCD, desde un punto exterior P, se traza el segmento $\overline{PB}$ perpendicular al plano ABC, M y N son los puntos medios de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ respectivamente. Si AB = PB, BC = 4 y AB = 2 entonces la medida del diedro P - MN - B es:

A) ArcTg$(\sqrt{5})$ B) ArcTg$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$
C) ArcTg$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ D) ArcTg$\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$
E) ArcTg$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

40. La base de un asta de bandera es de concreto y está formada por dos prismas hexagonales regulares concéntricos puestos uno sobre otro. El primero tiene 1,20 m y el segundo 0,80 m de lado; la altura de cada uno de ellos es 0,30 m. Si ambos prismas tienen un hueco central cilíndrico de radio de 8 cm, entonces la cantidad de concreto utilizado para construir esta base (en m^3) es aproximadamente:

A) 1,55 B) 1,57 C) 1,59
D) 1,61 E) 1,63

CENTRO DE ESTUDIO PITÁGORAS EXAMEN DE ADMISIÓN 2010-I
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

RESOLUCIÓN

01. $a_1 = 0;\ a_2 = 1;\ a_3 = \frac{1}{2};\ a_4 = \frac{3}{4}$

Si: n = 1 $\quad a_1 = \dfrac{\frac{1}{3}(2^0-1)}{2^{-1}}$

n = 2 $\quad a_2 = \dfrac{\frac{1}{3}(2^1+1)}{2^0}$

⋮

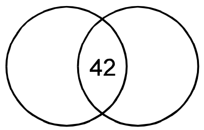
n = n $\quad a_n = \dfrac{\frac{1}{3}(2^{n-1}+(-1)^n)}{2^{n-2}}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\overset{0}{\cancel{\frac{(-1)^n}{2^{n-2}}}}\right\} = \frac{2}{3}$$

Rpta. C

02. Total = 100a

Arit = 60a Al = 32a



42 = 60% ningún curso

⇒ ningún curso = 70
Total = 60a + 32a - 42 + 70 = 100a
28 = 8a
7 = 2a
Total = 100a = 350

Rpta. B

03. F= {(3; 1); (2; -3); (5; 0); (4; -4); (1; 1)}
G={(-4; 3); (-2; 7); (0; 0); (1; 5); (2; 1)}
H={(1; -4); (3; -2); (5; 0); (7; 2)}

Teorema:
si (a; b) ∈ G ∧ (b; c) ∈ F ⇒ (a; c) ∈ FoG
FoG = {(-4; 1); (1; 0); (2; 1)}
H = {(1; -4); (3; -2); (5; 0); (7; 2)}
∴ (FoG) o H = {(1; 1); (7; 1)}

Rpta. C

04. $X\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

det(X) = ??
Por teorema |A| |B| = |AB| ↔ A y B son cuadradas
entonces:

$\det(X)\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

det(X) . (1) = 8
∴ det(X) = 8

Rpta. C

05. Sea:

$\left.\begin{array}{l}\text{Matemática: } 5a\\ \text{Literatura : } 3a\end{array}\right\}72$

⇒ a = 9

Piden:

$$\frac{\text{Matemática}}{\text{Literatura}} = \frac{45}{27+x} \overset{\times 5}{\underset{\times 5}{=}} \frac{9}{10}$$

∴ x = 23

Rpta. C

06. $P_{lista} = (100 + r)\%\ P_{costo}$
$P_{venta} = (100 - p)\%\ P_{lista}$

Dato:
No se gana ni se pierde ⇒$P_{venta}=P_{costo}$
$(100-p)\%\ P_{lista} = P_{costo}$
$(100-p)\% \,.\, (100+r)\%\ P_{costo} = P_{costo}$

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right) = 1$$

$$1-\frac{p}{100} = \frac{1}{1+\frac{r}{100}}$$

$$1-\frac{1}{1+\frac{r}{100}} = \frac{p}{100}$$

$$\frac{\frac{r}{100}}{1+\frac{r}{100}} = \frac{p}{100}$$

$$\frac{r}{1+\frac{r}{100}} = p \Rightarrow p = \frac{1}{\frac{1}{r}+0{,}01}$$

Rpta. D

07.

S/. 80 000	200 000	400 000
30 d	60 d	90 d

⇒ Vencimiento común

$$= \frac{80\,000.30+200\,000.60+400\,000.90}{680\,000}$$

Vencimiento común = 74,117 ⇒
Aproximado = 74

Rpta. E

08. **Propiedad:** $\underbrace{\overline{abc\ldots z_n}}_{\text{k cifras}} = N$

$n^{k-1} \le N < n^k$
⇒ $1\,234 = \overline{abc}_x$
$x^2 \le 1\,234 < x^3$
$x^2 \le 1\,234 \wedge 1\,234 < x^3$
$x \le 35{,}1 \qquad 10{,}7 < x$
$10{,}7 < x \le 35{,}1$
x: 11, 12, 13, ..., 35 ⇒ 25 valores

Rpta. C

09. I. **Falso** Ejemplo: 5+(-7) = -2
II. **Falso** Ejemplo: a = 7; b = 5
7 = 5c (c no es entero)
III. **Falso**

Rpta. E

10. I. **Verdadero**
II. **Falso** Ejemplo:
$m = 6$ y $n = 3 \Rightarrow \frac{m}{n} = 2$
III. **Verdadero**
$MCD(3m, 3n) = 3MCD(m, n) = \overset{o}{3}$

Rpta. B

11. $CD(N_1) = CD(N_2)+20$
$N_1 = 2^{3a+1}\times 3^{a+1}\times 2^{3a}$
$N_1 = 2^{6a+1}\times 3^{a+1}$
$N_2 = 2^{3a}\times 3^{3a+1}$
⇒ $(6a+2)(3a+2) = (3a+1)(3a+2)+20$
$(6a+2)(3a+2) - (3a+1)(3a+2)=20$
$(3a+1)\times(3a+2) = 20$
$a = 1$
Piden: 2a-1=1

Rpta. A

12. $(\overline{ab})^3 = \overline{1c8ab}$

Formando grupos de 3: $\overline{1c} = k^3 = a^3$

$a = 2$

$\overline{2b}^3 = \overline{1c82b}$

b = 4 , 5 , 6 , 9
sí no no no

$\overline{ab}^3 = \overline{1c8ab}$
$24^3 = 13\ 824$

b=4 ; c = 3

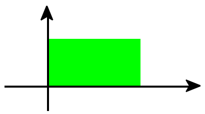
$\Rightarrow$ a+b - c = 3

Rpta. E

13. $y - |y| = x - |x|$

i) $x \geq 0 \ \wedge y \geq 0$

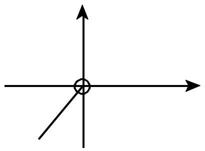
$y - y = x - x \Rightarrow 0 = 0$



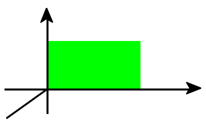
ii) $x < 0 \ \wedge y < 0$

$2y = 2x$

$y = x$



Los otros casos no presentan solución.



Rpta. D

14. Como $x_1 \wedge x_2$ son raíces de:

$x^2-(a+d)x+ad-bc=0$

$\Rightarrow$ 8 = a+d

$\Rightarrow$ 15 = ad - bc

De la ecuación:

$y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3=0$

i) $y_1+y_2 = a^3+d^3+3bc(a+d)$

$\Rightarrow$ $y_1+y_2 = (a+d)\{a^2-ad+d^2+3bc\}$

$$\mathbf{y_1+y_2 = \underbrace{(a+d)}_{8}\ \{\underbrace{(a+d)}_{8}^2 - 3\underbrace{(ad-bc)}_{15}\}}$$

ii) $y_1y_2 = (ad-bc)^3 \Rightarrow y_1\,y_2 = (15)^3$

Luego: $y_1^2y_2+y_1y_2^2=513\ 000$

Rpta. D

15. I. Por definición de función, es **verdadero**.

II. Es **falso**, veamos un contraejemplo: F: [-1; 1] ➞ [0; 1] $F(x)=x^2$, esta función es sobreyectiva pero no es inyectiva.

III. Es **falso**, veamos un contraejemplo:

Sea: F: [0; 1] ➞[0; 2]

Si: F(x)=x $\Rightarrow$ R_F =[0; 1], pero observamos que el rango está incluido en el conjunto de llegada por lo tanto no es sobreyectiva.

VFF

Rpta. C

16. I. $e^{in} = 1 = e^{oi} = e^{2k\pi i}$

$\Rightarrow$ n=2kπ donde: k $\in$ Z

Pero la igualdad no se verifica porque n $\in \mathbb{N}$

$\therefore$ Es **falso**

II. $e^{i\theta}$ = Cosθ+iSenθ=a+bi

$\Rightarrow$ a = Cosθ $\wedge$ b =Senθ

Si: $\theta \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$ por la función

coseno: $a \in \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

Si: $\theta \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$ por la función

seno: $b \in \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right\rangle$ (**falso**)

III. α, β $\in$ <0; 2π>, si:

Cosα=Cosβ $\Rightarrow$ α+β=2π

$\Rightarrow e^{i(\alpha+\beta)}=e^{i2\pi}=1$ (**verdadero**)

Rpta. C

17. S = C.S

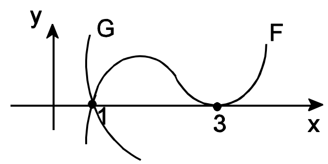
$$x^3-7x^2+15x-9 = \frac{1}{\text{Log}_x \frac{3}{5}}$$

Restricciones: x > 0 $\wedge$ x≠1 .... U

Resolviendo:

$$\mathbf{\underbrace{(x-1)\ (x-3)^2}_{F(x)} = \overbrace{\text{Log}_{3/5}x}^{G(x)}}$$

Graficando:



$\Rightarrow$ x = 1

pero del U: x≠ 1

$\therefore$ C.S= Φ

Rpta. A

18. $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$S = A^{42}+A^{55}$

$A^2 = AA = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ➞

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^3=A^2A= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ➞

$A^3= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$

➞ $\boxed{A^3 = A}$

$A^{42}=A \ \wedge \ A^{55} = A^{54}A = A.A \Rightarrow A^{55} = A^2$

$S = A+A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Rpta. B

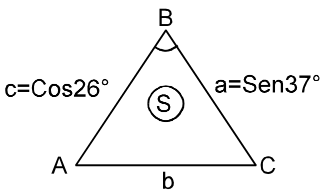
19. Sean:
$2x-y+z = 1$ .... (α)
$x+4y+2z = -1$ .... (β)
Efectuando: 2(α)-(β):
Se tiene: $9y+3z = -3$
$3y+z=-1$ sea: $z=t$
$\Rightarrow\ y = -\frac{1+t}{3} \wedge x = \frac{1-2t}{3}$
Reemplazando en la ecuación I y en III se observa que verifican.

Rpta. C

20. I. Es **falso**, ya que las condiciones de no negatividad significan que las variables de decisión deben ser positivas o nulas.
II. Es **verdadero**, ya que las restricciones que se obtienen en forma de desigualdades lineales son finitas a la vez éstas generan regiones con vértices finitos.
III. Es **verdadero**, ya que si multiplicamos por una misma constante los coeficientes de la función objetivo, entonces la solución óptima no cambia.

Rpta. D

21. Siendo S el área:



✻ $A+B+C = 180°$
✻ $A+C = 153°30' \Rightarrow B=26°30'$

Luego:
$S = \frac{acSenB}{2}$
$S = \frac{Sen27°Cos26°Sen26°30'}{2}$
$S = \frac{2Sen27°Cos26°}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$
Transformando a diferencia:
$S = \frac{\sqrt{5}}{20}(Sen53°+Sen1°)$
Reemplazando $Sen1° = \frac{7}{400}$:
$\Rightarrow\ S = \frac{\sqrt{5}}{20}\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{400}\right)$
$\therefore S = \frac{327\sqrt{5}}{4\,000}$

Rpta. E

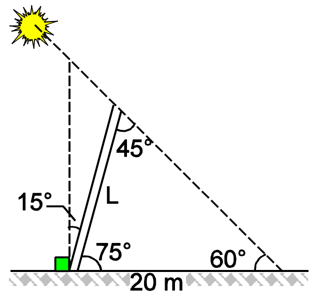
22. $2Sen^3x+Sen^2x-2Senx-1=0;\ x \in [0; 2\pi]$
Factorizando:
$Sen^2x(2Senx+1)-(2Senx+1) = 0$
$(2Senx+1)(Senx+1)(Senx-1)= 0$
Igualando cada factor a cero:
$Senx = -\frac{1}{2}$; $Senx =-1 \wedge Senx=1$
$x= \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; x = \frac{3\pi}{2}\ ; x = \frac{\pi}{2}$
Suma de soluciones:
$\sum x= 5\pi$

Rpta. A

23. $E=(-2)\ ArcSen\left[Cos\left(\frac{33\pi}{5}\right)\right]$
Sabemos:
$ArcSenx+ArcCosx=\frac{\pi}{2}$
$\Rightarrow\ E = (-2)\left[\frac{\pi}{2} - ArcCos\left(\underbrace{Cos\left(\frac{33\pi}{5}\right)}\right)\right]$
$\mathbf{E = (-2)\left[\frac{\pi}{2} - \cancel{Arc\ Cos}\left(\cancel{Cos}\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)\right]}$
$E = (-2)\left[\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5}\right] = -2\left[-\frac{\pi}{10}\right]$
$\therefore E = \frac{\pi}{5}$

Rpta. E

24. Siendo L la longitud del poste:

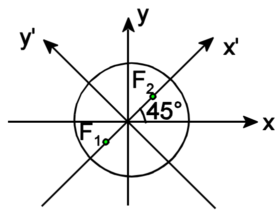


Del gráfico:
Por el teorema de senos:
$\frac{L}{Sen60°} = \frac{20\ m}{Sen\ 45°}$
$\therefore L = 24,5\ m$

Rpta. C

25. Ecuación general:
$5x^2-8xy+5y^2 - 9 = 0$ .... (1)
Siendo "θ" el ∢ de rotación, sabemos:
$Ctg2\theta = \frac{5-5}{-8} = 0 \Rightarrow 2\theta = 90°$
$\theta = 45°$
✻ Fórmula de rotación:
$\left.\begin{array}{l} x = x'Cos\theta - y'Sen\theta \\ y = x'Sen\theta + y'Cos\theta \end{array}\right\}$ .... (2)

Reemplazando (2) en (1), se obtiene:
$E':\ \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{1} = 1 \left\{\begin{array}{l} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \end{array}\right.$
$\Rightarrow c = \sqrt{8}$



$F_1 = (a, b) = F_1(-\sqrt{8}, 0)$
$F_2 = (c, d) = F_2(\sqrt{8}, 0)$

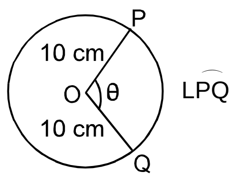
$\therefore ac+bd = -8$

Rpta. E

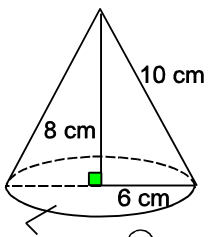
26. $F = \frac{Sen2A+Sen2B+Sen2C}{SenASenBSenC}$
Transformando a productos el numerador:
$\Rightarrow\ F = \frac{4\cancel{SenASenBSenC}}{\cancel{SenASenBSenC}}$
$\therefore F = 4$

Rpta. D

27. Del círculo de papel.



se forma un cono al unir OP y OQ



$L\odot = L\overset{\frown}{PQ} = 2\pi(6) = 12\pi$ cm

Sabemos: $L = \theta r$

$12\pi = \theta.10$

$\therefore\ \theta = \dfrac{6\pi}{5}$

Rpta. C

28. $K = \left(\dfrac{-Tg343° - Tg107°}{Tg197° + Tg73°}\right)Tg163°$

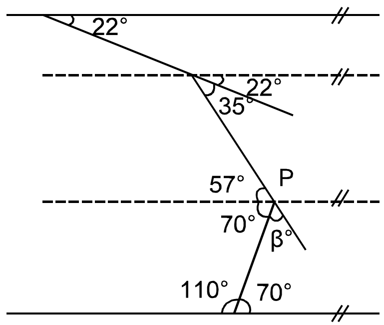
Por reducción al primer cuadrante:

$K = \left(\dfrac{+Tg17° + Tg73°}{Tg17° + Tg73°}\right)(-Tg17°)$

$\therefore$ K = -Tg17°

Rpta. A

29.



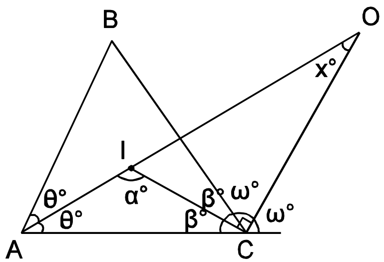
Luego de trazar paralelas y ubicar algunos ángulos, en P se tiene:

$57 + 70 + \beta = 180$

$\therefore \beta = 53$

Rpta. B

30.



Dato: α + x = 150 ...... (1)

Propiedad: m ∢ ICO = 90

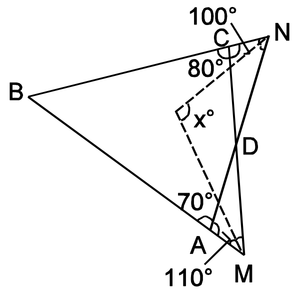
◺ICO: α = 90 + x

En (1): 90 + x + x = 150

$\therefore$ x = 30

Rpta. C

31.



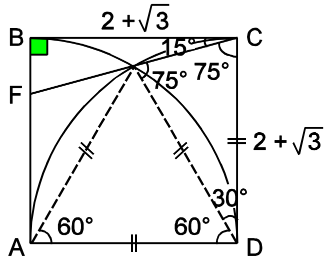
Propiedad:

$x = \dfrac{110 + 100}{2}$

$\therefore$ x = 105

Rpta. C

32.



Del gráfico:

Por resolución de triángulos rectángulos:

$\overline{BF} = (2 + \sqrt{3})Tg15°$

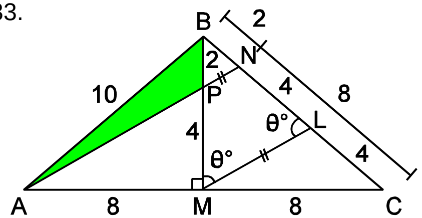
$\overline{BF} = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$

$\overline{BF} = 2^2 - (\sqrt{3})^2$

$\therefore\ \overline{BF} = 1$

Rpta. D

33.



En el triángulo AMB: BM = 6

Se traza $\overline{ML} \,//\, \overline{AN}$, entonces:

NL = LC = 4

Luego: m∢BML = m∢BLM = θ

(ΔMBL: isósceles)

⇒ PM = 4 ∧ BP = 2

(⏢MPNL: trapecio isósceles)

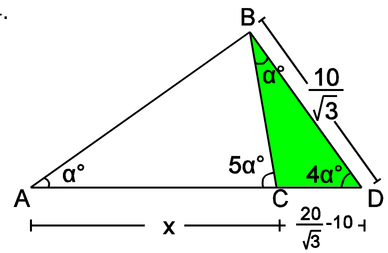
Finalmente:

$S_{APB} = \dfrac{2 \times 8}{2}$

$\therefore S_{APB} = 8$

Rpta. C

34.



ΔABD ~ ΔBCD

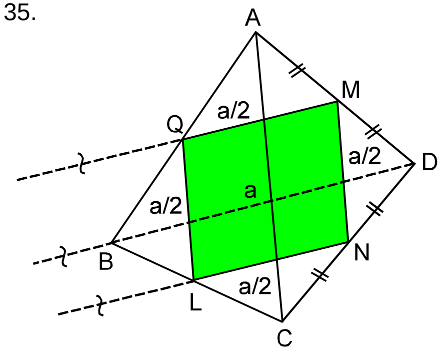
$$\frac{\dfrac{10}{\sqrt{3}}}{x + \dfrac{20}{\sqrt{3}} - 10} = \frac{\dfrac{20}{\sqrt{3}} - 10}{\dfrac{10}{\sqrt{3}}}$$

Resolviendo:

$\therefore$ x = 20

Rpta. B

35.

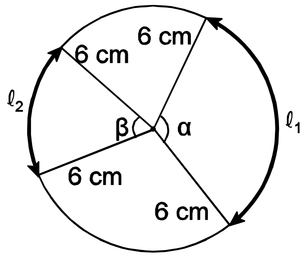


$$\text{Perímetro(MNLQ)} = 4\left(\frac{a}{2}\right)$$

Perímetro = 2a

Rpta. D

36.



Se sabe:

$$\ell = \theta r$$

$$\ell_1 - \ell_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha.6 - \beta.6 = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{3} \; ..... \text{(I)}$$

además:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \; ...... \text{(II)}$$

(I) + (II):

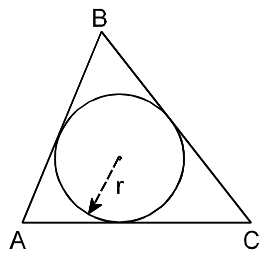
$$2\alpha = 10\frac{\pi}{18}$$

$$\alpha = 10\frac{\pi}{36}$$

$$\therefore \; \alpha = 50°$$

Rpta. A

37.



Dato: $S_{\bigcirc} = 9\pi$

$$S_{ABC} = \frac{9(\sqrt{2}+2)^2}{2}$$

Se pide: 2p = perímetro del triángulo ABC

Del dato: $S_{\bigcirc} = 9\pi$, obtenemos r = 3

Luego: $S_{ABC} = p.r$

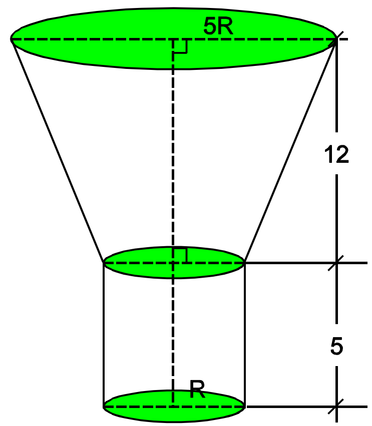
$$\Rightarrow \quad \frac{9(\sqrt{2}+2)^2}{2} = p\,.\,3$$

$$\frac{3(2+4+4\sqrt{2})}{2} = p$$

$$\therefore \; 2p = 6(3+2\sqrt{2})$$

Rpta. E

38.



Por dato: $V_{embudo} = 129\pi$

Luego:

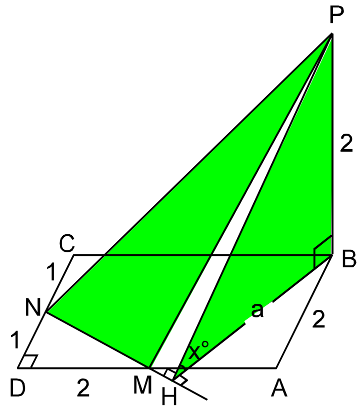
$$\frac{\pi.12}{3}((5R)^2 + R^2 + (5R)R) + \pi R^2.5 = 129\pi$$

$$124R^2 + 5R^2 = 129$$

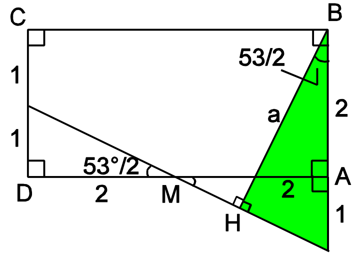
$$\therefore \; R = 1$$

Rpta. B

39.



Se pide: x



Se observa:

$$BH = a = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

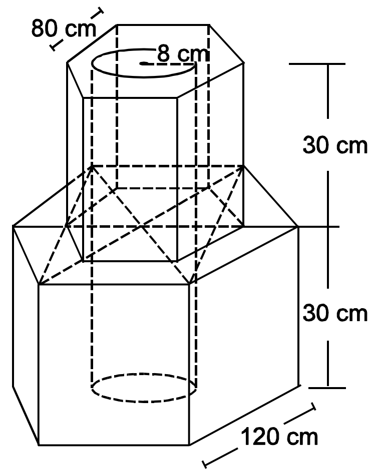
Luego:

$$Tgx° = \frac{2}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore \; x = ArcTg\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

Rpta. C

40.



$$V_x = 6\left(\frac{120^2\sqrt{3}}{4}\right)30 + 6\left(\frac{80^2\sqrt{3}}{4}\right).30 - \pi 8^2.60$$

Desarrollando:

$$\therefore V_x = 1,61$$

Rpta. D